

Věta sinová a kosinová

1) Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno $b=16,7$ cm, $\alpha=24^\circ 15'$, $\gamma=112^\circ$.

Řešení:

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je vždy 180° :

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (24^\circ 15' + 112^\circ) = 180^\circ - 136^\circ 15' = 43^\circ 45'$$

Strany a , c se vypočítají podle sinové věty: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{16,7 \cdot \sin 24^\circ 15'}{\sin 43^\circ 45'} = \frac{16,7 \cdot 0,4107}{0,6915} \doteq 9,9$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{16,7 \cdot \sin 112^\circ}{\sin 43^\circ 45'} = \frac{16,7 \cdot 0,9272}{0,6915} \doteq 22,4$$

2) Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno $a=64,5$ m, $b=53$ m, $c=41,8$ m.

Řešení:

Užitím kosinové věty $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$ a cyklických záměn.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(64,5)^2 + (53)^2 - (41,8)^2}{2 \cdot 64,5 \cdot 53} = \frac{4160,25 + 2809 - 1747,24}{6837} = \frac{5222,01}{6837} = 0,7638$$

$$\gamma = 40,2^\circ = 40^\circ 12'$$

Úhel α lze vypočítat kosinovou i sinovou větou (uvedeno řešení užitím kos. věty).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{53^2 + 41,8^2 - 64,5^2}{2 \cdot 53 \cdot 41,8} = 0,08937$$

$$\alpha = 84,87^\circ = 84^\circ 52'$$

Úhel β dopočítáme přes součet vnitřních úhlů trojúhelníku, ale užití kosinové (popř. sinové) věty by nebylo chybou, jen by cesta k výsledku byla delší.

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (84^\circ 52' + 40^\circ 12') = 180^\circ - 125^\circ 4' = 54^\circ 56'$$

3) Místa A a B (viz obrázek) jsou spojena přímým tunelem. Určete jeho délku, znáte-li vzdálenosti $|AC|=185$ m, $|BC|=273$ m a úhel $\alpha=78^\circ 42'$.

Řešení:

Ze sinové věty vypočítáme úhel β :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{185 \cdot \sin 78^\circ 42'}{273} = 0,6645$$

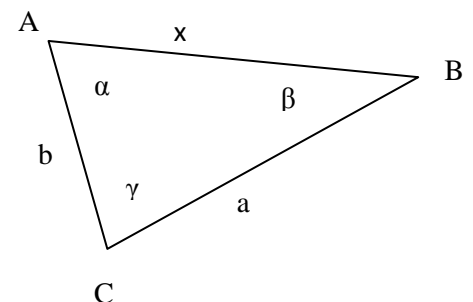
$$\beta = 41^\circ 39'$$

$$\gamma = 180^\circ - (78^\circ 42' + 41^\circ 39') = 59^\circ 39'$$

Z kosinové věty zjistíme požadovanou délku x :

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = 273^2 + 185^2 - 2 \cdot 273 \cdot 185 \cdot \cos 59^\circ 39' \Rightarrow x \doteq 240$$

Délka tunelu je přibližně 240 m.



4) V trojúhelníku ABC ($a=36\text{cm}$, $\beta=30^\circ$, $\gamma=45^\circ$) určete velikost strany b.

5) V trojúhelníku ABC ($a=6\text{cm}$, $b=8\text{cm}$, $c=5\text{cm}$) určete velikost úhlu β .

6) Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) $c = 48 \text{ m}$, $\alpha = 72^\circ$, $\beta = 53^\circ$

b) $a = 25,6 \text{ cm}$, $b = 18,3 \text{ cm}$, $\alpha = 35^\circ 20'$

c) $a = 48,7 \text{ cm}$, $c = 85,1 \text{ cm}$, $\gamma = 104^\circ 40'$

d) $b = 142 \text{ m}$, $\alpha = 71^\circ 45'$, $\beta = 33^\circ 28'$

e) $a = 75 \text{ m}$, $c = 58 \text{ m}$, $\beta = 112^\circ$

f) $a = 18 \text{ m}$, $b = 24 \text{ m}$, $c = 11 \text{ m}$

g) $a = 5 \text{ m}$, $b = 8 \text{ m}$, $c = 11 \text{ m}$

h) $a = 18 \text{ m}$, $b = 11 \text{ m}$, $c = 11 \text{ m}$

i) $b = 17,5 \text{ m}$, $\beta = 39^\circ 43'$, $\gamma = 24^\circ 18'$

j) $a = 129,8 \text{ m}$, $\beta = 42^\circ 50'$, $\gamma = 105^\circ 37'$

k) $a = 21 \text{ m}$, $b = 15 \text{ m}$, $\alpha = 67,5^\circ$

l) $b = 14,8 \text{ cm}$, $c = 22,6 \text{ cm}$, $\gamma = 56^\circ 38'$

m) $a = 25,5 \text{ m}$, $b = 18,7 \text{ m}$, $\gamma = 108^\circ 45'$

n) $b = 1,5 \text{ dm}$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 72^\circ$

o) $a = 50 \text{ mm}$, $\beta = 82^\circ 12'$, $\alpha = 55,3^\circ$

p) $c = 10 \text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 25^\circ$

q) $a = 4,8 \text{ m}$, $\beta = 36^\circ 48'$, $\gamma = 47,2^\circ$

r) $c = 12 \text{ km}$, $b = 10 \text{ km}$, $\beta = 30^\circ$

6) Vypočítejte velikost největšího úhlu v trojúhelníku, jehož strany mají délky 36 m, 49 m a 25 m.

7) Určete výšku na stranu c trojúhelníku ABC, je-li $\beta = 54^\circ$, $b = 31 \text{ cm}$, $c = 23 \text{ cm}$.

8) Řešte trojúhelník OPQ:

a) $|PQ| = 4 \text{ m}$, $|\angle P Q O| = 26^\circ$, $|\angle O P Q| = 64^\circ$

b) $|OP| = 0,64 \text{ dm}$, $|\angle Q O P| = 31^\circ 50'$, $|\angle O P Q| = 58^\circ 10'$

9) Řešte trojúhelník RST:

a) $|RS| = 0,18 \text{ dm}$, $|\angle T R S| = 53^\circ$, $|\angle R S T| = 132^\circ$

b) $|TS| = 2,5 \text{ km}$, $|\angle R S T| = 127^\circ 15'$, $|\angle S T R| = 53^\circ 45'$

10) Určete vnitřní úhly trojúhelníku KLM:

a) $|KL| = 4 \text{ cm}$, $|LM| = 2 \text{ cm}$, $|MK| = 9 \text{ cm}$

b) $|MK| = 0,7 \text{ dm}$, $|KL| = 40 \text{ mm}$, $|LM| = 12 \text{ cm}$

11) Vypočítejte, v jakém zorném úhlu vidí pozorovatel kolonu vozidel na dálnici dlouhou 2km, je-li od jejího začátku vzdálen 4km a od konce 5km.

12) Na vrcholu kopce stojí rozhledna 35m vysoká. Její patu a vrchol vidíme z údolí pod výškovými úhly 28° a 31° . Vypočítejte, jak vysoko je vrchol kopce nad rovinou pozorovacího místa.

13) Určete velikost zorného úhlu, pod kterým je vidět šířka fotbalové branky (7,32 m) z místa, které je od jedné tyče branky vzdáleno 25 m a od druhé 21 m.

14) Po 2 přímých tratích svírajících úhel 120° vyjely z nádraží zároveň 2 vlaky, osobní vlak rychlostí 60km/h, rychlík 100km/h. Vypočítejte jejich vzdušnou vzdálenost po 30 minutách.

15) Ze stanice vyjely současně dva vlaky po přímých tratích, které svírají úhel $105^\circ 45'$. Určete jejich vzájemnou vzdálenost po uplynutí 45 minut, je-li jeden vlak rychlostí 50km/h a druhý rychlostí 65km/h.

16) Síly o velikostech 52N a 86N působící v bodě P svírají úhel $\omega = 58^\circ 30'$. Vypočítejte velikost jejich výslednice a úhly, které s ní jednotlivé síly svírají.

17) Určete velikost výslednice sil $F_1=5\text{N}$ a $F_2=20\text{N}$ působících v tomtéž bodě a svírajících úhel 60° .

18) Síla o velikosti 22,5N je rozložena na dvě složky F_1 , F_2 , které s ní svírají úhly $\alpha=23^\circ$, $\beta=76^\circ$. Určete velikosti těchto složek.