

Goniometrické funkce v úlohách

1) Určete objem pravidelného 8bokého jehlanu, který má výšku 0,85 m a boční odchylku hrany od roviny podstavy $60^{\circ}28'$.

Řešení:

Objem jehlanu určíme ze vzorce $V = \frac{1}{3} S_p v$.

Podstava je pravidelný osmiúhelník, který lze rozložit na 8 stejných rovnoramenných trojúhelníků. Obsah jednoho z nich určíme pomocí trigonometrického vzorce:

$$S_1 = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} r^2 \sin 45^{\circ} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} r^2, \text{ kde } r \text{ je poloměr kružnice opsané}$$

podstavě jehlanu.

$$\text{Obsah celé podstavy je } 8S_1 = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} r^2 = 2r^2 \sqrt{2}.$$

Poloměr r vypočítáme z trojúhelníka AVO, kde A je jeden vrchol podstavy, V je vrchol jehlanu, O je střed podstavy a úhel OAV je odchylka boční hrany jehlanu od roviny podstavy. Trojúhelník AVO je pravoúhlý. Využijeme definici goniometrické funkce kotangens. $|\text{VO}| = v = 0,85 \text{ m}$, $|\text{OAV}| = 60^{\circ}28'$, $|\text{VOA}| = 90^{\circ}$, $|\text{OA}| = r$

$$\cot g 60^{\circ}28' = \frac{v}{r} \Rightarrow r = v \cdot \cot g 60^{\circ}28' = 0,85 \cdot 0,5665 = 0,4816$$

$$V = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} \cdot 2r^2 \sqrt{2} \cdot v = \frac{2\sqrt{2}}{3} r^2 v = \frac{2\sqrt{2}}{3} (v \cdot \cot g 60^{\circ}28')^2 \cdot v = \frac{2\sqrt{2}}{3} v^3 \cdot \cot g^2 60^{\circ}28' =$$

$$= 0,9428 \cdot (0,85)^3 \cdot (0,5665)^2 = 0,9428 \cdot 0,6141 \cdot 0,3209 = 0,1858$$

Objem daného pravidelného osmibokého jehlanu je přibližně 186 dm^3 ($0,186 \text{ m}^3$).

2) Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $a = 8,2 \text{ cm}$; $b = 5,3 \text{ cm}$; $\gamma = 116^{\circ}$

b) $a = 9,5 \text{ cm}$; $c = 6,7 \text{ cm}$; $\beta = 43^{\circ}15'$

c) $b = 12,8 \text{ cm}$; $c = 7,1 \text{ cm}$; $\alpha = 26^{\circ}38'$

3) Určete obsah rovnoramenného trojúhelníku, jehož rameno má délku 10 cm a úhel při základně má velikost 52°

4) Pozemek má tvar kosodélníku, jehož sousední strany mají délky 118 m, 86 m a svírají úhel 76° . Určete jeho výměru.

5) Vypočítejte obsah pravidelného šestiúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru $r = 5 \text{ cm}$.

6) Určete objem pravidelného šestibokého jehlanu, jehož podstavná hrana má délku 18 cm a boční hrana 24 cm.

7) Obelisk má tvar pravidelného pětibokého jehlanu o výšce 3,5 m. Jeho podstava stojí na kruhové desce o poloměru 0,75 m tak, že je vepsána do kružnice, která tuto desku ohraničuje. Určete objem obelisku.

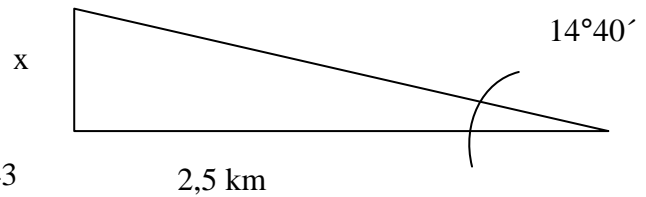
8) Turista vidí chatu na vrcholu hory pod výškovým úhlem $14^{\circ}40'$; podle mapy zjistil, že je od ní vzdálen 2,5 km. Jak vysoko nad jeho stanovištěm se chata nachází?

Řešení:

Situaci lze znázornit pravouhlejším trojúhelníkem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{2,5} \Rightarrow x = 2,5 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2,5 \cdot 0,2617 = 0,6543$$

Chata je přibližně 654 m nad stanovištěm turisty.



9) Příkop má průřez ve tvaru rovnoramenného lichoběžníku. Šířka dna je 5 dm, ramena svírají se dnem úhel 120° a jsou dlouhá 6 dm. Vypočítejte horní šířku a hloubku příkopu.

10) Schodiště s 25 schody stoupá pod úhlem 20° . Vypočítejte celkovou výšku schodiště, je-li šířka jednoho schodu 30 cm.

11) Na stráni s úhlem stoupání 15° mají být vysázeny stromy. Určete, jak daleko od sebe musí být kopány jamky, aby vodorovná vzdálenost mezi stromy byla 3 m.

12) Benzinová pumpa stojící u jedné ze dvou silnic, které svírají úhel 68° , je od jejich křižovatky vzdálená 850 m. Jak dlouhá bude zamýšlená cesta spojující pumpu s druhou silnicí, má-li být její délka co nejkratší?

13) Kužel má výšku 23 cm, odchylka jeho strany od roviny podstavy je $58,5^{\circ}$. Určete jeho objem a povrch.

14) Z okna domu, které je ve výšce 7,5 m nad vodorovným náměstím, je vidět vrchol kostelní věže pod výškovým úhlem $54^{\circ}20'$ a její patu pod hloubkovým úhlem $15^{\circ}40'$. Určete výšku věže.

15) Vrchol věže stojící na rovině vidíme z určitého bodu této roviny pod výškovým úhlem $41^{\circ}35'$. Přiblížíme-li se k ní o 60 m, vidíme vrchol pod úhlem $56^{\circ}15'$. Určete výšku věže.

16) Lanová dráha je dlouhá 920 m a stoupá pod úhlem 36° . Určete vodorovnou vzdálenost mezi horní a dolní stanicí.

17) Určete výškový rozdíl mezi dvěma stanicemi lanovky, je-li délka lana mezi nimi 680 m a stoupání lanovky je 65‰. (Označení např. 14‰ znamená, že na vzdálenost 1000 m stoupneme o 14 tisícín z 1000 m, tedy o 14 m)

18) Určete velikost výslednice dvou navzájem kolmých sil o velikostech 64,7 N a 38,4 N a úhel, který každá z nich svírá s jejich výslednicí.

19) Určete objem pravidelného čtyřbokého jehlanu, který má výšku 12 cm a jehož odchylka boční hrany od roviny podstavy je 28° .

20) Vypočítejte, v jakém zorném úhlu vidí pozorovatel kolonu vozidel na dálnici dlouhou 2 km, je-li od jejího začátku vzdálen 4 km a od konce 5 km.

21) Dvě přímé důlní štoly, vycházející z téhož místa C, svírají úhel 100° . Délka štoly DC je 80 m, délka štoly CE je 158 m. Jak dlouhou spojovací štolu DE bude nutno prorazit?

- 22) Na vrcholu kopce stojí rozhledna 35m vysoká. Její patu a vrchol vidíme z údolí pod výškovými úhly 28° a 31° . Vypočítejte, jak vysoko je vrchol kopce nad rovinou pozorovacího místa.
- 23) Na vrcholu kopce stojí rozhledna 30m vysoká. Její patu a vrchol vidíme z údolí pod výškovými úhly 30° a 32° . Vypočítejte, jak vysoko je vrchol kopce nad rovinou pozorovacího místa.
- 24) Určete velikost zorného úhlu, pod kterým je vidět šířka fotbalové branky (7,32 m) z místa, které je od jedné tyče branky vzdáleno 25 m a od druhé 21 m.
- 25) Z lodi je vidět světlo majáku $6^\circ 57'$ od směru, kterým pluje. Po ujetí 8,4 km (stále v původním směru) je z lodi vidět světlo téhož majáku $45^\circ 35'$ od směru plující lodi. Jak daleko byla loď od majáku v uvedených dvou místech?
- 26) Balon B byl pozorován v daném okamžiku ze dvou míst R, S, ležících v téže vertikální rovině s balonem B pod výškovými úhly $\varphi = 32^\circ 12'$ a $\omega = 47^\circ 50'$. Vzdálenost míst R, S je 100 m. V jaké výšce je balon?
- 27) Za dvou míst A, B ležících na téže straně kopce a téže vertikální rovině s vrcholem kopce V je vidět vrchol pod výškovými úhly $16^\circ 15'$ a $8^\circ 13'$. Vypočítejte výšku kopce nad úrovní krajiny, je-li $|AB| = 1000$ m.
- 28) Dvě místa A, B, oddělená lesem, mají být spojena přímkou silnicí. Z bodu C vzdáleného od místa A 800 m je vidět přímo místo B. Byla změřena velikost úhlu $|\angle ACB| = 60^\circ$ a výpočtem zjištěna vzdálenost míst C a B, která je 600 m. Jak dlouhá bude silnice?
- 29) Určete šířku řeky BC, jestliže byly změřeny velikosti úhlů z míst A a B na témže břehu řeky: $|\angle BAC| = 23^\circ$, $|\angle ABC| = 142^\circ$. Vzdálenost míst A a B je 50 m.
- 30) Po 2 přímých tratích svírajících úhel 120° vyjely z nádraží zároveň 2 vlaky, osobní vlak rychlostí 60km/h, rychlík 100km/h. Vypočítejte jejich vzdušnou vzdálenost po 30 minutách.
- 31) Ze stanice vyjely současně dva vlaky po přímých tratích, které svírají úhel $105^\circ 45'$. Určete jejich vzájemnou vzdálenost po uplynutí 45 minut, je-li jeden vlak rychlostí 50km/h a druhý rychlostí 65km/h.
- 32) Síly o velikostech 52N a 86N působící v bodě P svírají úhel $\omega = 58^\circ 30'$. Vypočítejte velikost jejich výslednice a úhly, které s ní jednotlivé síly svírají.
- 33) Určete velikost výslednice sil $F_1=5$ N a $F_2=20$ N působících v tomtéž bodě a svírajících úhel 60° .
- 34) Síla o velikosti 22,5N je rozložena na dvě složky F_1 , F_2 , které s ní svírají úhly $\alpha=23^\circ$, $\beta=76^\circ$. Určete velikosti těchto složek.
- 35) Síly o velikostech 300N a 400N svírají úhel 40° . Vypočítejte velikost výslednice těchto sil a odchylku výslednice od jednotlivých složek